RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per aiutare la popolazione dell'indigente pianeta *Annares*, il pirata spaziale *Capitan Albator* ha riunito i comandanti delle n astronavi *Arcardiae* della sua flotta con lo scopo di pianificare il saccheggio dei ricchissimi m pianeti del sistema solare *Tau Ceti*. I suoi esploratori hanno stimato in p_j astri di neodimio il valore delle d_j tonnellate di materie prime da depredare sul pianeta j. L'astronave i ha una capacità di carico pari a D_i tonnellate mentre, grazie alle più recenti tecnologie basate sui cunicoli spazio-temporali, può viaggiare con un costo che dipende esclusivamente dall'accensione dei motori spazio-temporali e pertanto raggiungere un pianeta costa c_i astri di neodimio indipendentemente dalla lunghezza del tragitto o dal peso complessivo dell'astronave stessa. Il tragitto di ciascuna astronave partirà e terminerà ad Annares sostando in ogni pianeta che dovrà saccheggiare. Per garantire il proseguimento delle altre attività piratesche, il consiglio dei comandanti stabilisce che non più della metà delle astronavi della flotta partecipi a questa missione.

Aiuta Capitan Albator a pianificare il saccheggio del sistema solare Tau Ceti, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere quali astronavi impiegare, quali pianeti ciascuna dovrà saccheggiare nel rispetto delle capacità di carico in modo da massimizzare il profitto complessivo dato dalla differenza tra il valore complessivo delle materie prime saccheggiate e dei costi di viaggio.

Scelte le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'astronave } i \text{ saccheggia il pianeta } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m,$$

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'astronave } i \text{ partecipa alla missione,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \max & \\ & 2\sum_{i=1}^{n} z_i \le n \\ & x_{ij}, z_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(p_j - c_i z_i)x_{ij}$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

B $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}(p_j - c_i)x_{ij} - c_i z_i\Big)$ (funzione obiettivo) — aggiungere

C $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge 1 \quad j = 1, \dots, m$ — non aggiungere

D $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le 1 \quad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere

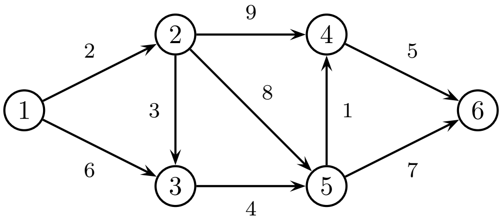
E $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 \quad j = 1, \dots, m$ — aggiungere

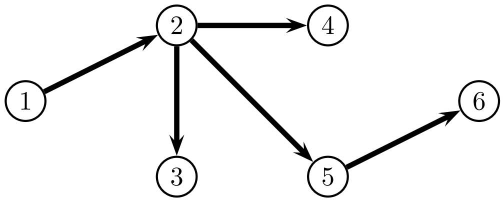
F $\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \le D_i z_i \quad i = 1, \dots, n$ — aggiungere

G $\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} z_i \le D_i \quad i = 1, \dots, n$ — non aggiungere

H $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} D_i x_{ij} \le \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{i=1}^{n} z_i$ — non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 2, 5, 9, 10, 17)$ è il vettore delle etichette relative all'albero — falso

B Il costo dell'albero è 29 — falso

b) Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(3,5),(5,4)\}$ II $\{(3,5),(4,6)\}$ III $\{(4,6),(5,4)\}$

c) Quanti archi bisogna sostituire nell'albero per ottenere un albero dei cammini minimi?

I 3 II 2 III 1

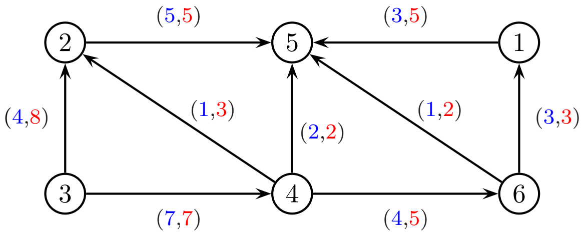
d) Qual è il vettore delle etichette di un albero dei cammini minimi?

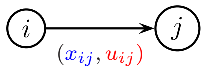
I $d = (0, 2, 5, 9, 10, 17)$ II $d = (0, 2, 5, 10, 9, 15)$ III $d = (0, 2, 5, 10, 8, 15)$

e) Modificare il costo di 2 archi dell'albero a destra in modo tale che sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta

$c_{56} \leq 6$ e $c_{27} \leq 7$ cosicché anche gli archi individuati alla domanda b) soddisfano le condizioni di Bellman

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 3 al nodo 5 sul grafo seguente:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura è 12. — falso

B La capacità del taglio $(\{2,3\},\{1,4,5,6\})$ è 12. — vero

b) Quale dei seguenti è un cammino aumentante?

I $\{3,2,4,5\}$ II $\{3,2,4,6,5\}$ III $\{3,4,2,5\}$

c) Qual è un taglio di capacità minima?

I $(\{2,3,5\},\{1,4,6\})$ II $(\{1,2,3,4,6\},\{5\})$ III $(\{2,3,4\},\{1,5,6\})$

d) Aumentando la capacità dell'arco $(3,4)$ a $u_{34} = 9$, di quanto aumenta il valore del flusso massimo?

$\boxed{\text{I}}$ 2 $\boxed{\text{II}}$ 1 $\boxed{\text{III}}$ 0

e) Modificare la capacità di un solo arco in modo tale che il flusso massimo abbia valore 14. Giustificare la risposta.

$u_{25} = 7$: $(2,5)$ è l'unico arco comune a tutti i tagli di capacità minima e questa nuova capacità permette di portare ulteriori 2 unità di flusso sul cammino $\{3,2,5\}$

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{lrrrrrrrrrrr} \min & & & y_2 & + & 3y_3 & + & 2y_4 & + & 2y_5 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\ & & & y_2 & + & y_3 & & & + & y_5 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3,4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ $\xi = (0,-1)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P) $\boxed{\text{falso}}$

$\boxed{\text{B}}$ $x = (0,1)$ e $y = (-3,2,0,0,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari $\boxed{\text{vero}}$

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\xi = (1,-1)$, $\bar{\lambda} = 1$ $\boxed{\text{II}}$ $\xi = (0,1)$, $\bar{\lambda} = 0$ $\boxed{\text{III}}$ $\xi = (-1,1)$, $\bar{\lambda} = 1$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\bar{x} = (0,1)$, $\bar{y} = (-3,2,0,0,0)$ $\boxed{\text{II}}$ $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (0,0,1,0,1)$ $\boxed{\text{III}}$ $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (1,0,2,0,0)$

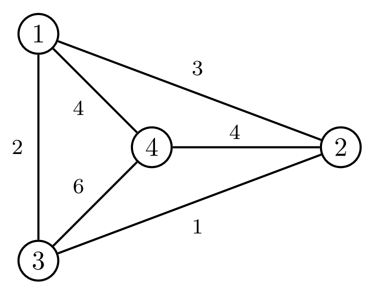
d) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(t,0,0,t+1,0) \,:\, t \geq 0\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(0,t,t+1,0,1-2t) \,:\, 0 \leq t \leq 1/2\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(0,0,1,0,1)\}$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che il problema duale (D) risulti vuoto. Giustificare la scelta effettuata.

$c = (0,-1)$: la direzione di recessione $\xi = (0,-1)$ diventa una direzione di crescita per (P), quindi il problema risulta superiormente illimitato e pertanto (D) vuoto

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 3-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 4)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza vero

B Gli archi $(3, 2)$ e $(3, 4)$ appartengono al 3-albero di costo minimo falso

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 10, v_S = 14$ II $v_I = 11, v_S = 12$ III $v_I = 12, v_S = 15$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per $v_I(P_i) > v_S(P_i)$ II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_{23}, x_{31} II 3: x_{23}, x_{31}, x_{12} III 4: x_{23}, x_{31}, x_{12}, x_{14}

e) Modificare il costo al più 2 archi in modo tale che esistano almeno 2 diversi cicli hamiltoniani di costo minimo. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{12} = 4$ e $c_{34} = 2$: esistono due 3-alberi di costo minimo entrambi ammissibili